Caltanissetta, 10/05/2005

Prima prova in itinere del corso di *Comunicazioni Elettriche* A.A. 2004-05 (*Prof. V. Mancuso*)

TRACCIA DELLA SOLUZIONE

Esercizio n.1

Si consideri il segnale s(t) la cui trasformata è rappresentata in Figura 1:

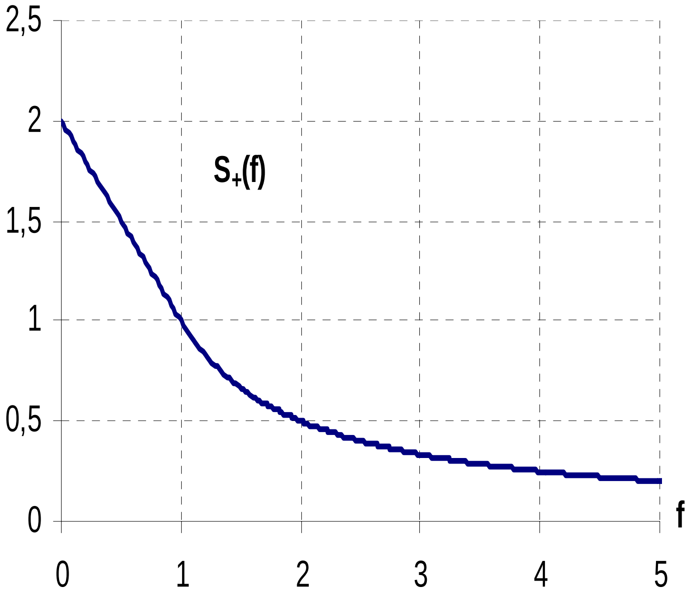


Figura 1 - Componenti a frequenze positive del segnale *s(t)*

$$S(f) = \begin{cases} 2-|f| & per \quad |f| \le 1 \\ \dfrac{1}{|f|} & per \quad |f| > 1 \end{cases}$$

Si calcolino:

a) l'energia del segnale *s(t)*;
b) l'intervallo di frequenze [-f_m ; f_m] all'interno del quale si concentra il 99% dell'energia del segnale;
c) le caratteristiche del filtro antialias e valore del tempo di campionamento minimo da utilizzare per campionare il segnale *s(t)* in modo da preservarne le caratteristiche nella banda [-f_m ; f_m];
d) l'espressione del segnale *s(t)* [lasciare indicati integrali del tipo $\int_a^b \frac{e^{j2\pi ft}}{f} df$].

Soluzione:

a) l'energia del segnale si può calcolare nel dominio della frequenza:

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|S(f)|^2 df = 2\int_{0}^{\infty}|S(f)|^2 df = 2\int_{0}^{1}(2-f)^2 df + 2\int_{1}^{\infty}\frac{1}{f^2}df = 2\left\{\left[4f-2f^2+\frac{f^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{f}\right]_1^{\infty}\right\}=$$

$$=2\left[4-2+\frac{1}{3}\right]+2[-0+1]=\frac{14}{3}+2=\frac{20}{3}=6,\bar{6}$$

b) il 99% dell'energia è pari a 0.99*20/3= 6,60 e si vede subito che l'intervallo di frequenze che cumulano tale energia va ben al di là di f=1 Hz (fino a f=1 Hz si accumula 14/3). Pertanto risulta:

$$99\%E = \int_{-f_m}^{f_m}|S(f)|^2 df = 2\int_{0}^{f_m}|S(f)|^2 df = \frac{14}{3}+2\int_{1}^{f_m}\frac{1}{f^2}df = \frac{14}{3}+2\left(1-\frac{1}{f_m}\right)=\frac{20}{3}-\frac{2}{f_m}$$

$$99\%E=\frac{99}{100}\cdot\frac{20}{3}=\frac{33}{5}$$

Quindi:

$$\frac{20}{3}-\frac{2}{f_m}=\frac{33}{5}\Rightarrow f_m=\frac{2}{\frac{20}{3}-\frac{33}{5}}=\frac{30}{100-99}=30Hz$$

c) il filtro antialias deve eliminare le componenti al di fuori di [$-f_m$, f_m], quindi bisogna usare una rect[f/ ($2f_m$)] per filtrare e poi campionare con una velocità minima di 2 f_m = 60 campioni al secondo.

d) per il punto d si procede per definizione di antitrasformata.

<u>Esercizio n.2</u>

Per quali valori del parametro T, i due segnali a energia finita $s_1(t)$ ed $s_2(t)$ risultano ortogonali?

$$s_1(t)=rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$s_2(t)=\left[\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{27}\right]rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

Qual è l'espressione dell'energia incrociata fra i due segnali, E_{12},al variare di T?

Soluzione:

si esprima l'energia incrociata dei segnali nel dominio del tempo e, per verificare la condizione di ortogonalità, si imponga E_{12}=0

<u>Esercizio n.3</u>

Si calcolino le espressioni dell'inviluppo complesso e della trasformata di Hilbert del segnale *s(t)* così definito:

$$s(t)=\begin{cases}\sin(\pi t)\dfrac{\cos(20\pi t)+\cos(22\pi t)}{\pi t} & per \quad t\neq 0\\ 2 & per \quad t=0\end{cases}$$

Soluzione:
si noti che $s(t)=Sinc(t)[\cos(20\pi t)+\cos(22\pi t)]=2\cdot Sinc(t)\cdot\cos(21\pi t)\cdot\cos(\pi t)$, la cui trasformata vale (fare i conti e aiutarsi coi grafici, oppure si consideri anche che Sinc(t)cos(πt)=sinc(2t): $S(f)=\frac{1}{2}\left[rect\left(\frac{f-\frac{21}{2}}{2}\right)+rect\left(\frac{f+\frac{21}{2}}{2}\right)\right]$.

Usando come frequenza centrale f_0=21/2 Hz, si può scrivere s(t) come segue:

$$s(t)=\mathrm{Re}\left\{2\cdot Sinc(t)\cdot\cos(\pi t)\cdot e^{-j2\pi\frac{21}{2}t}\right\}=2\,\mathrm{Re}\left\{w(t)\cdot e^{-j21\pi t}\right\}$$

Con inviluppo complesso $w(t)=Sinc(t)\cdot\cos(\pi t)$, mentre la trasformata di Hilbert del segnale si può calcolare come segue:

$$H(s(t))=\mathrm{Im}\left\{2\cdot Sinc(t)\cdot\cos(\pi t)\cdot e^{-j21\pi t}\right\}=-2\cdot Sinc(t)\cdot\cos(\pi t)\cdot\sin(21\pi t)$$

Esercizio n.4

Si determini l'espressione dei coefficienti di Fourier per il segnale a potenza finita *s(t)* ottenuto come ripetizione periodica, con periodo T = 4 secondi, della forma d'onda *g(t)* mostrata in Figura 2.

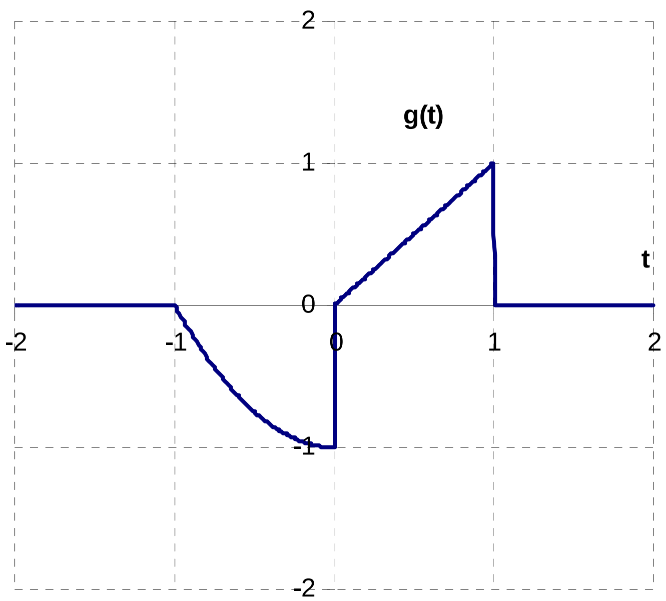


Figura 2 - segnale troncato *g(t)*

$$g(t) = \begin{cases} t^2 - 1 & per \quad -1 \le t \le 0 \\ t & per \quad 0 < t \le 1 \end{cases}$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(t - nT)$$

Quanto vale il segnale che si ottiene facendo attraversare ad *s(t)* un filtro lineare e tempo invariate caratterizzato dalla risposta in frequenza *H(f)* riportata in Figura 3?

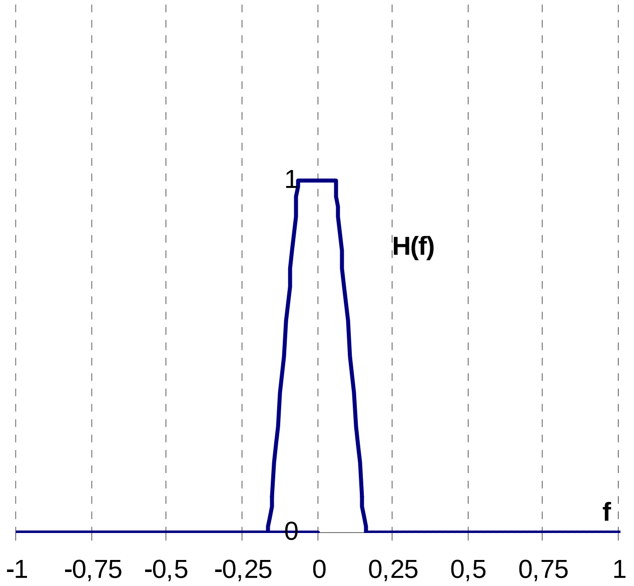


Figura 3 - Risposta in frequenza del filtro passa-basso

Soluzione:

si proceda per definizione nel calcolo dei coefficienti. Poiché il periodo di ripetizione della forma d'onda è T=4, le armoniche cadono sulle frequenze 0, ¼, ½, ¾ , 1, …. (e corrispondenti freq. Negative), pertanto il filtro di fig. 3 elimina tutte le frequenze diverse dalla frequenza nulla, e l'uscita dal filtro è una costante pari al valor medio del segnale di fig.2

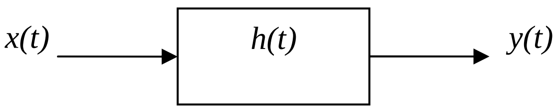
Esercizio n.5

Calcolare il valore dell'uscita *y(t)* di un sistema lineare e tempo-invariante nelle ipotesi che la risposta in frequenza del sistema valga

$$H(f) = \frac{e^{-j4\pi f}}{2 + j2\pi f}$$

e che l'ingresso sia

$$x(t) = rect(2t - 1)$$



(suggerimento: si operi nel dominio del tempo e si disegnino le funzioni *x(t)* ed *h(t)*)

Soluzione:
si tenga conto del fatto che l'antitrasformata di H(f) è $h(t) = e^{-2(t-2)}u(t-2)$ e si proceda graficamente per la convoluzione di h(t) e x(t)

Esercizio n.6

Si commenti la seguente affermazione, argomentando le motivazioni che la rendono corretta o errata: *"La densità spettrale di energia di un segnale a banda rigorosamente limitata può assumere valori negativi in un insieme al più numerabile di punti"*

Soluzione:
la densità spettrale di energia è sempre maggiore o uguale a zero, essendo definita come un modulo al quadrato